

INTRODUCTION À LA MODÉLISATION ET
À LA SIMULATION DES RÉSEAUX
NEURONAUX

10 juin 2002

Notes pour le cours des Maîtrises de Sciences Cognitives (UE3) et de Biologie Cellulaire et Physiologie.

J.C. GILHODES
Octobre 2001

Préambule Ce cours a pour ambition d'exposer quelques unes des bases théoriques et pratiques de la modélisation et la simulation. Il ne prétend pas à une présentation exhaustive des modèles actuellement développés et des méthodes de simulations. Pour chaque domaine d'étude spécifique il revient éventuellement à l'enseignant concerné de présenter et d'expliquer les modèles qui relèvent de son domaine de compétence. Ce cours est une présentation introductive de la démarche modélisatrice, de son intérêt et de ses méthodes. Pour aider à la compréhension des principes de base ainsi que des techniques, ce cours est accompagné de séances de travaux dirigés qui reprennent certains des modèles décrits pour les exploiter dans des simulations numériques.

Il comporte quatre parties :

Généralités et définitions concernant la modélisation et la simulation, pourquoi modéliser ? quelles méthodes ... ?

Des exemples de modèles mathématiques pris en neurosciences et en psychophysique ;

La démarche de modélisation des réseaux neuronaux, notion de neurone formel, l'algorithmique des simulations....

Des exemples de modèles de réseaux neuromimétiques, maintenant classiques, mettant en application les notions évoquées précédemment.

Ce document n'est pas un ouvrage 'rédigé', il est une compilation de notes manuscrites destinées aux exposés oraux. Cependant quoique sa forme soit très imparfaite, il peut compléter très utilement vos propres notes de cours. Les références bibliographiques indiqués ici ou là, permettront, à ceux qui le souhaitent, d'aller au-delà du contenu de cet enseignement et d'approfondir le sujet. Concernant les aspects particuliers de la modélisation dans le cadre des applications (sciences de l'ingénieur) et de la psychologie, ils seront exposés par C. Touzet et E. B ? (Maîtrise de Sciences Cognitives). Le cours destiné aux étudiants de Maîtrise Biologie Cellulaire et Physiologie se limite à une partie des chapitres de ce document.¹ ▷

¹Ce document a été mis en forme avec Klyx, logiciel de mise en page , les figures dessinées avec Xfig, dans un environnement Linux (Klyx, Xfig et Linux sont des logiciels 'libres')

Table des matières

1	Généralités et définitions	5
1.1	Modèle	5
1.2	Modéliser	6
1.3	Formalisme	6
1.3.1	Forme concrète	7
1.3.2	Forme abstraite	7
1.3.2.1	Modèles mathématiques :	8
1.3.2.2	Modèles Systémiques :	8
1.4	Simuler, simulation	10
1.4.1	Modes de simulation	10
1.4.2	Méthodes de simulation :	11
1.4.2.1	Modes de simulations numériques :	11
1.4.3	Calibrer et valider le modèle	12
2	Modèles mathématiques en sciences cognitives	15
2.1	Les modèles de la psychophysique	15
2.1.1	Loi de WEBER-FECHNER	15
2.1.2	Équation de STEVENS :	16
2.2	Neurobiologie : Fonction de codage des fuseaux neuromusculaires	16
2.2.1	Rappels	16
2.2.2	Fonction de codage des fuseaux chez l'homme	16
2.3	Neurobiologie cellulaire : Potentiel de repos neuronal	19
3	Modélisation et Simulation des réseaux neuronaux	21
3.1	Bref historique	21
3.2	Modélisation des réseaux neuronaux	22
3.2.1	Neuromimes et équation neuroniques	22
3.2.2	Jonctions synaptiques et équations mnémoniques.	25
3.3	Simulation numérique	26
3.3.1	Algorithmique	26
3.3.1.1	Simulation synchrone	26
3.3.1.2	Simulation asynchrone	27

4	Exemples de Réseaux neuromimétiques	29
4.1	Réseau discriminateur (B. ANS, J. HÉRAULT, C. JUTTEN) . . .	29
4.1.1	Le questionnement	29
4.1.2	Description du modèle	30
4.1.3	Simulations	32
4.1.4	Généralisation	32
4.1.5	Applications	32
4.2	Modèle de mémoire associative (T. KÖHÖNEN)	32
4.2.1	Architecture	33
4.2.2	Équations	34
4.2.3	Simulations	35
4.2.4	Commentaires	35
4.3	Réseau Topologique de T. Köhonen (1982)	35
4.3.1	Problématique	35
4.3.2	Architecture	36
4.3.3	Équations	38
4.3.4	Algorithme	39
4.3.5	Simulations	39
	4.3.5.1 Simulation 1 :	40
	4.3.5.2 Simulation 2 :	40
4.4	Modélisation de l'organisation sensori-motrice (J.C. Gilhodes, Y. Coiton)	40
4.4.1	Problématique	40
4.4.2	Simulation robotique :	41
4.4.3	Apprentissage de séquences motrices :	42
4.5	Exemple du programme de construction et de simulation de réseaux nerveux de D. PERKEL.	42
4.5.1	Les composants du réseau	42
4.5.2	Fonctions et variables d'état :	43
4.5.3	Algorithme	44
5	Annexes	47
5.1	Le modèle de MC CULLOCH ET PITTS	47
5.2	L'organisation d'un Perceptron	48

Chapitre 1

Généralités et définitions

Remarque préalable :

Les notions abordées ici, modèle, représentation, connaissance, renvoient naturellement au domaine philosophique particulier de l'épistémologie; comme telles, elles nécessiteraient évidemment des développements théoriques plus conséquents. Dans le cadre de ce cours nous nous limiterons aux définitions utiles à une perspective d'application pratique.

1.1 Modèle

Au sens commun, le modèle c'est l'idée que l'on se fait de quelque chose, une représentation d'une réalité donnée : objet, structure, comportement. D'une certaine manière, c'est la forme que prend la connaissance de cette réalité à un moment donné.

Marque une étape de la compréhension (si le modèle est réussi). On lira avec profit les différentes définitions du Petit Robert, dont celle-ci : « *Représentation simplifiée d'un système, d'un processus* » (noter au passage le « simplifiée »)

Il est à remarquer que cette notion de modèle, prise au sens de *représentation*, est une donnée permanente de toute activité humaine, et ce dès les niveaux les plus élémentaires. Par exemple, tout comportement se construit sur la base de représentations élaborées au sein du système nerveux : représentation du corps propre et du monde construite à partir d'une quête active d'informations (activités sensori-motrices de perception). Ces représentations prennent notamment des formes d'activités nerveuses dans des aires organisées cartographiquement (aires somatiques, visuelles...) comme l'électrophysiologie unitaire et l'imagerie cérébrale en témoignent. Nous ne connaissons des choses et de nous même que ces représentations. A un niveau plus intégré, comme par exemple celui de la connaissance de notre environnement social, chacun bâtit sa représentation de cet univers qui l'entoure etc. ¹ Bref, quel que soit le niveau ou elle s'exprime

¹Autre domaine privilégié de la représentation : le théâtre (ou le cinéma) lieu où se jouent des *représentations*, où s'expriment un individu, l'auteur, et des comédiens sur leur manière

-neurobiologique ou psychologique- la représentation est une des bases vitales du comportement. Pour, ce qu'il est convenu d'appeler, un chercheur la représentation mentale de son objet d'étude est tout aussi nécessaire et évidente. [Elle peut cependant rester floue, non-dite, pour différentes raisons : parce que c'est une étape ou, à la limite, ce sera un aboutissement. Elle transparaît alors dans, peut se déduire de, la démarche expérimentale (choix des indices, du contexte Cette représentation peut être partagée par plusieurs chercheurs, peut être controversée]. *Ce qui va retenir notre attention ici c'est la démarche qui consiste à élaborer de façon délibérée un modèle : c'est-à-dire modéliser.*

1.2 Modéliser

Élaborer le modèle. Quoiqu'il n'y ait pas de véritable méthode, divers préalables peuvent aider dans cette élaboration, préalables qui n'ont pas toujours un caractère d'évidence :

- Définir le but, la finalité du modèle par exemple : comprendre (but scientifique), faire comprendre (but didactique), souvent ces deux buts se confondent. Accroître, améliorer la connaissance. Prédire, faire de la prévision... ou tout simplement décrire.
- Définir d'abord les contours de l'objet à modéliser, ses limites : Comportement et/ou mécanismes qui les sous-tendent.
- Choisir le (ou les) formalisme(s) (cf. ci dessous) c'est-à-dire la manière de représenter l'objet.
- Choisir le niveau de simplification (cf. les définitions des variables des lois, des paramètres. etc.....)

C'est une phase importante, féconde, en raison même de ce travail de définition, de choix, d'élaboration d'hypothèses. C'est une phase de décantation du savoir implicite : qu'est-ce qui est important, essentiel, sous quelle forme l'énoncer ? L'échec y est au moins aussi important que la réussite (il n'y a pas à proprement parler d'échec : le rejet argumenté d'un modèle est en soi un progrès). La modélisation, en tant que phase d'élaboration du modèle, c'est le passage de l'implicite à l'explicite².

1.3 Formalisme

Terme à définir comme : nature de la forme constitutive du modèle. Cette forme est contingente de l'état de culture générale et spécifique, notamment de ceux qui tentent de formaliser. Pour cette raison, et pour d'autres, le modèle est

de voir une certaine réalité. Réalité crue ou transcendée. Même chose pour le peintre, poète, à ceci près que les artistes en général donnent à voir -parfois- plus que ce que les autres ont pu percevoir. (A noter que pour le peintre ce qu'il représente est déjà défini comme un 'modèle' -par exemple un nu-, noter également que les mannequins, hommes ou femmes sont des représentations "idéales" (« top-model »).

²{voir *Maïeutique*, méthode suscitant la réflexion intellectuelle (accoucher les esprits des pensées qu'ils contiennent sans le savoir (Socrate))}

temporaire, provisoire, doit être conçu comme devant évoluer, être transformé... ou abandonné (cf. plus loin critères d'évaluation). Des progrès dans d'autres disciplines peuvent amener à abandonner un formalisme au profit d'un autre. Ici comme ailleurs, il peut y avoir des modes, des tendances, qui reflètent un consensus des spécialistes. La taxinomie des formalismes est difficile en raison des intersections entre les différentes formes... . On peut distinguer les formes concrètes , ou abstraites³ :

1.3.1 Forme concrète

La représentation est réalisée matériellement, à l'aide d'éléments physiques relevant de différentes technologies comme la mécanique ou l'électronique. Par exemple *maquettes* ou *modèles réduits* (maquettes pour études de l'aérodynamique en soufflerie; modèles électroniques de neurones....). Certains jouets d'enfants peuvent être conçus à la lettre comme des modèles construits ou à construire (sur la base d'un ensemble d'éléments de base : "Légo", "Mécano"....), jeux dont l'utilité est aussi d'apprendre autant que de divertir. Cette notion d'activité ludique n'est pas absente de la modélisation à but scientifique, le but est le même : apprendre.

Les *simulateurs* sont des modèles d'une réalité connue (un avion, un tanker, un trafic routier, un neurone ...), élaborés avec un objectif essentiellement didactique. Ils conservent de la réalité les éléments strictement nécessaires pour faire acquérir à des élèves la maîtrise de l'objet dans son contexte spécifique : par exemple atterrissage sans visibilité, manoeuvres portuaires d'un tanker.... Les simulateurs sont équivalents aux jouets des enfants dans leur principe (dans ce cas, l'intérêt économique domine toutefois l'intérêt ludique).⁴

1.3.2 Forme abstraite

Représentation, modèle dialectique établi sur la base d'un langage; langage courant parfois augmenté d'un lexique spécialisé (quelquefois un jargon), exprimant une manière de "se représenter" quelque chose, un fonctionnement une propriété ... Plus généralement : toute *connaissance*⁵ s'exprime à travers un langage. Il existe deux grandes classes de langage : les langages ou langues *naturelles*, comme le finnois ou l'arabe par exemple, et les langues dites *artificielles* comme celle de la logique ou des mathématiques. Les connaissances exprimées avec les langues naturelles sont de nature phénoménologique, celles qu'expriment les langages artificiels sont scientifiques.

³à quoi l'on pourrait ajouter peut-être aujourd'hui, les formes virtuelles (ou pseudo-concrètes) que permettent les techniques informatiques.

⁴Autre acception du terme "simulateur" : celui qui fait semblant, qui est, comme le comédien, en représentation, mais sa représentation vise à tromper; il se réfère néanmoins lui-même à un modèle : ex simuler une maladie

⁵(Philo.) Connaissance : rapport entre un sujet (qui connaît) et un objet (qui est connu).

1.3.2.1 Modèles mathématiques :

Langage mathématique : il sert de support à une classe de modèles nombreux. Exemple classique des équations formulant les relations entre fonctions et variables telles qu'on en trouve d'abondance en physique ($e = m.c^2$!, $U = R.I$, $f = m\gamma$...). Des exemples de modèles mathématiques en neurosciences et en sciences cognitives sont présentés plus loin (Partie II). Pour aboutir à de telles expressions on peut mettre en oeuvre différents procédés, par exemple :

- par voie statistique : les données expérimentales sont exprimées au préalable sous forme d'un graphe qui met sur la voie d'une équation représentative. Les paramètres de la fonction sont obtenus à l'aide des méthodes de la statistique qui permettent par ailleurs d'évaluer le degré d'adéquation (régressions linéaires simples ou multiples, polynomiales, non linéaires etc..)
- > Transparent des observations, mesures reportées sur un graphe formant une esquisse de courbe dont on recherche la nature mathématique.
 - par voie analytique : le modèle est élaboré sur la base d'une analyse des propriétés, caractéristiques de l'objet
 - méthode cybernétique : démarche analogique sur la base des fonctions de transfert entrées/sorties établies à partir de méthodes d'analyse harmonique, transitoire..

Certains systèmes formés de plusieurs composantes peuvent se modéliser à l'aide d'une séquence d'équations; par exemple en écologie, modèle d'une chaîne alimentaire formée d'éléments dont chacun est fonction du précédent. Les effectifs de chaque composante sont des fonctions des effectifs des composantes qui précèdent.⁶

(-> transparent. Cf. Dynamique des populations.)

Enfin il faut insister sur le fait que même si le modèle n'est expressément pas un modèle mathématique dans sa globalité, il peut cependant emprunter le langage mathématique pour certaines de ces parties; c'est notamment le cas des modèles de systèmes complexes.

1.3.2.2 Modèles Systémiques :

Ce sont ceux qui vont nous intéresser plus particulièrement pour représenter les réseaux constitutifs du système nerveux⁷.

Notion de *Système* : Ensemble composé d'*éléments* en interaction.

Éléments : entités définies par des *caractéristiques (attributs ou prédicats)* qualitatives et quantitatives. Par exemple le neurone, considéré comme élément d'un réseau, peut être défini comme possédant un potentiel de membrane qui peut être quantifié, il peut être affecté d'une caractéristique de réfractorité absolue ou/et relative...

⁶Systèmes dynamiques : cf. cours de G.Shöner, option de maîtrise de sciences cognitives.

⁷la notion de système est développée par ailleurs dans les théories structuralistes (linguistique, psychologie -cf. J Piaget-, sociologie

Parmi les entités qui composent le système certaines peuvent être *permanentes* d'autres *temporaires* (se souvenir que les cellules naissent et meurent, se multiplier par exemple⁸) {remarque utile pour les modélisations de type évolutionniste « darwinienne » (EDELMAN, CHANGEUX..), où intervient la sélection au niveau des connexions synaptiques}.

Les caractéristiques des éléments peuvent prendre des valeurs variables ou rester constantes. Dans le premier cas on parle de *Variables d'état* (caractérisent l'état de l'élément à un moment donné); dans le cas contraire ces caractéristiques constituent alors des *paramètres* de l'élément. Selon les nécessités et les buts de la modélisation l'élément sera défini par un nombre plus ou moins important d'attributs. L'évolution des variables d'état est régie par des *lois internes* à l'élément, ou peuvent également dépendre de *lois d'interaction* définissant les relations entre les éléments du système (à noter que ces lois sont en général partagées par tous les éléments de même type). Par ailleurs, peuvent intervenir dans l'évolution du système des *lois générales* affectant l'ensemble d'une classe d'éléments (exemple : l'évolution du degré de plasticité de l'ensemble des synapses d'un réseau en fonction de l'âge de celui-ci. En règle générale, sauf à représenter un système fermé, (autistique (individu); autarcique (société); adiabatique (systèmes thermiques)...), le modèle est conçu comme ouvert à un environnement duquel il reçoit des informations⁹. Celles-ci déterminent en partie le comportement du système.

Sur la base des définitions du paragraphe précédent, la modélisation d'un système donné (un fluide, une population d'individus, un écosystème, un réseau de neurones...) consistera donc à déterminer les caractéristiques des éléments, les différentes lois, -lois internes, d'interaction ou lois générales- qui en régissent l'évolution ainsi que les signaux extérieurs auxquels il est soumis. La définition 'idéale' d'un système et de ses composantes pourrait être une *définition exhaustive*, c'est-à-dire une définition faisant intervenir toutes les caractéristiques et les lois propres à l'objet réel. Une telle définition est par nature impossible et inutile : en effet une telle connaissance n'existe pas, et d'autre part le modèle atteindrait le même degré de complexité que l'objet lui-même¹⁰. Le niveau maximal de définition possible est *pseudo-exhaustif* : il regroupe l'ensemble des connaissances acquises sur le système. Il est évident que dans ce cas aussi l'excès de définitions empêche la modélisation. De fait on limitera la définition, pour ces raisons théoriques et pratiques, aux caractéristiques et lois pertinentes au regard du problème abordé. Raisons théoriques : par exemple un neurone conçu comme élément d'un réseau peut être caractérisé par sa fonction d'entrée/sortie sans qu'il soit nécessaire de prendre en compte, par exemple, l'état des différents

⁸pour des raisons de plausibilité neurobiologique on a pu éviter d'utiliser dans les modèles de réseau la possibilité d'une multiplication cellulaire; le dogme du non-renouvellement des neurones étant remis en cause -au moins pour certaines structures-, cette neurogénèse va pouvoir intervenir dans les modèles.

⁹prendre en compte des interactions très nombreuses avec l'environnement revient à étendre les frontières du système étudié.

¹⁰à la limite, dans le cadre de la connaissance des systèmes complexes tels qu'ils sont définis ici, tout savoir consiste à revenir au point de départ : le modèle est identique à son objet. [paradigme des machines (artificielles) pensantes?]

canaux ioniques ou les phénomènes métaboliques ; par contre, si l'on s'intéresse au neurone en particulier, alors on développera un modèle où ces mêmes canaux prendront éventuellement place en tant qu'éléments. Par ailleurs, d'un point de vue pratique : la mise en fonctionnement du modèle peut être pénalisée par des *définitions surabondantes* (temps calcul excessif, encombrement des espaces mémoires...). En effet l'excès de paramètres et de variables est un facteur de brouillage qui diminue la lisibilité du modèle pour l'observateur, en même temps qu'elle accroît considérablement le nombre des simulations nécessaires pour prendre en compte toutes les configurations possibles du modèle (explosion combinatoire des différents paramètres). L'art de la modélisation réside en grande partie dans cet équilibre entre pauvreté et excès de définition. Enfin, d'un point de vue pratique et esthétique, parmi plusieurs modèles possibles d'un même objet on préférera le plus simple.

1.4 Simuler, simulation

Certaines formalisations permettent de déduire les propriétés du modèle par une démarche analytique : par exemple les propriétés d'un modèle mathématique peuvent parfois se déduire par des moyens logico-mathématiques (démonstration, applications de théorèmes ...etc.) ; pour d'autres, seule la simulation permet de déterminer les propriétés du modèle. En effet, le plus souvent, le fait qu'un système soit construit à partir d'éléments dont le comportement est connu ne suffit pas à connaître le comportement de l'ensemble, et ce d'autant plus que le nombre d'éléments est grand. Par exemple, si le nombre d'éléments est de quatre, et si chacun agit sur les trois autres, il y a alors 12 connexions formant de nombreux circuits dont la connaissance ne renseigne pas complètement sur le comportement de l'ensemble (cf. ROSS ASHBY, Introduction à la cybernétique). Une des manières d'appréhender les propriétés de tels systèmes est alors de les faire fonctionner, c'est-à-dire de faire fonctionner une représentation formalisée de ces systèmes, c'est cela que nous appellerons la *simulation*.

La simulation consiste à faire fonctionner le modèle afin de tester son comportement, mettre en évidence ses propriétés (vérifier celles qu'on lui suppose, découvrir celles qu'on ignore).

In fine, la simulation a pour objectif de vérifier l'adéquation du modèle à son objet.

1.4.1 Modes de simulation

Dépendent de la nature du modèle. Pour un modèle concret il devra d'abord être construit en vue de la simulation ; par exemple un modèle de neurone électronique sera câblé. On peut également envisager l'utilisation, de machines à calculer analogiques, plus polyvalentes, dont les circuits réalisent des opérations arithmétiques et des fonctions plus élaborées comme dérivation (condensateurs) ou intégration. Les difficultés technologiques rencontrées pour ce type de machine ont conduit néanmoins à privilégier l'utilisation d'ordinateurs numériques.

La plupart des modèles peuvent en effet donner lieu à des simulation numériques, c'est-à-dire être programmés sur ordinateur ("implémenter" le modèle) *La simulation numérique est la mise en oeuvre d'un ensemble de techniques informatiques et mathématiques permettant de réaliser et d'analyser diverses expériences effectuées sur le modèle de ce système au moyen d'un ordinateur digital* (MEYER et al). La programmation peut être effectuée à l'aide de langages de programmation standard (Basic, Pascal, C, C++, Java etc.), à l'aide de langages spéciaux dédiés à la simulation (Simulink...), ou encore à partir de programmes d'application dédiés à la modélisation et à la simulation d'objets spécifiques (exemple programme de simulation de structures moléculaires en 3d, de systèmes mécaniques (Solid Dynamic System) ou encore de réseaux nerveux).

1.4.2 Méthodes de simulation :

La simulation consiste pour l'essentiel à calculer l'état du système d'instant en instant, c'est à dire à *actualiser* les différentes variables d'état de chaque élément. Le temps, en simulation numérique, évolue par intervalles discrets, et pour une durée déterminée. L'actualisation au moment où elle se produit, fait intervenir les diverses lois du système (lois internes, d'interactions etc.. telles qu'elles ont été définies précédemment). L'évolution des variables est parfois affichée durant la simulation pour permettre d'observer le comportement du système ; elle peut être enregistrée pour permettre d'analyser ultérieurement ce comportement. Les choix des affichages graphiques sont importants et parfois difficiles compte tenu du nombre important de variables.

1.4.2.1 Modes de simulations numériques :

Synchrone, vs asynchrone. Lors des simulations numériques, comme il a été dit ci-dessus, le temps n'est pas une variable continue mais discrète. L'état du système n'est calculé que pour ces instants particuliers. La manière de gérer l'évolution du temps lors des simulations peut se faire de différentes façon : on peut envisager de calculer, d'*actualiser* les variables d'état du modèle soit de manière synchrone, soit de manière asynchrone. Dans le premier cas toutes les variables élémentaires sont mises à jour périodiquement, à chaque itération. Dans le cas opposé, seules les variables des éléments où il se "passe quelque chose" (événement) sont actualisées et ce, au moment où l'événement se produit. Ainsi le temps -fictif- qui accompagne la vie du modèle peut progresser par intervalles de durées très inégales. (Dans les deux cas ces actualisations consistent à calculer à l'aide des lois qui caractérisent le modèle, les valeurs nouvelles que prennent ces variables). À noter la possibilité de simulations mixtes faisant intervenir des phases de simulations asynchrones alternant avec des phases de synchronie.

Déterministe vs stochastique Un simulation stochastique fait intervenir expressément des événements aléatoires qui n'interviennent pas dans une simulation déterministe. (A noter : il convient de parler plutôt de *pseudo-aléatoire* lorsque la méthode de génération de ces événements est automatique, connue

Selon le "Petit Robert" : stochastique, qui est le fruit du hasard; math. : qui comporte la présence de variables aléatoires.

du programmeur. Ces méthodes de génération pseudo-aléatoires ont une place très importante dans les procédés de simulation et peuvent faire l'objet d'une séance de Travaux Dirigés). Le procédé numérique de base consiste en général à produire une suite de valeurs à partir d'une valeur initiale¹¹ (la graine : 'seed'); la distribution obtenue correspond à un profil de probabilité uniforme (toutes les valeurs sont équiprobables). Les autres distributions, gaussiennes, loi gamma, exponentielles... sont calculées à partir de cette base pseudo-aléatoire uniforme. Il est à noter que la qualité de la suite produite gagne parfois à être vérifiée (on recherchera par exemple des périodicités parasites dans la série).

1.4.3 Calibrer et valider le modèle

Les paramètres d'un modèle, c'est-à-dire les constantes qu'il contient, sont assez souvent mal connus a priori. Il est alors nécessaire de mettre au point le modèle à l'aide d'estimations initiales de ces paramètres. Les procédures de validation (cf. ci-dessous) permettront d'apprécier l'adéquation de ces estimations.

Les différentes simulations d'un modèle produisent des données (données de simulation) caractérisant son comportement, données qui peuvent être comparées à celles issues du système objet, généralement obtenues par l'observation ou l'expérimentation. On peut utiliser une procédure répétitive de simulation où à chaque répétition les valeurs des différents paramètres sont modifiées après comparaison des comportements respectifs du modèle et de son objet. La procédure se poursuit jusqu'à ce que la concordance des comportements soit jugée satisfaisante par le modélisateur. Cette validation du modèle peut être automatisée, grâce à la mise en oeuvre de procédures modifiant à chaque itération les paramètres sur la base de fonctions critères permettant de quantifier l'écart entre les comportements du système et du modèle Exemple de fonction critère :

$$F = \sum_{i,n} (E_i - \hat{E}_i)^2$$

somme des carrés des écarts, où E est un variable d'état du modèle et \hat{E} la variable correspondante du système modélisé, n le nombre d'itérations. Le meilleur jeu de paramètres est alors celui qui minimise la fonction F . Les méthodes de calibration ainsi que les tests statistiques classiques permettent de décider de la représentativité du modèle.

Le modèle idéal est celui qui, non seulement reproduit les comportements connus du système objet, mais également prédit des comportements inconnus, non encore observés de ce système. Ces comportements inconnus peuvent être ceux qui se produiraient dans des conditions extrêmes, rares ou difficiles à mettre en oeuvre dans des expériences sur l'objet. L'aptitude du modèle à la prédiction, est un des critères majeurs d'appréciation d'un modèle de comportements. La confiance que l'on accordera au modèle est naturellement plus forte lorsque ses prédictions se vérifient. A contrario les prédictions non confirmées peuvent conduire au rejet du modèle, ou tout au moins doivent conduire à le modifier.

¹¹l'utilisation d'une même "graine" entraîne la production d'une suite identique à chaque fois. C'est parfois utile pour tester le modèle après y avoir introduit quelques modifications. Il est possible de se servir de l'horloge de l'ordinateur pour obtenir des graines inconnus a priori du programmeur.

La simulation révèle aussi parfois des propriétés, dites émergentes, non explicitement contenues dans la définition du modèle, ce rôle heuristique est un des intérêts majeurs du couple modélisation-simulation. On doit alors définir les protocoles expérimentaux permettant a posteriori, de vérifier la réalité de ces propriétés. Heuristique, .. qui a pour objet la découverte des faits.

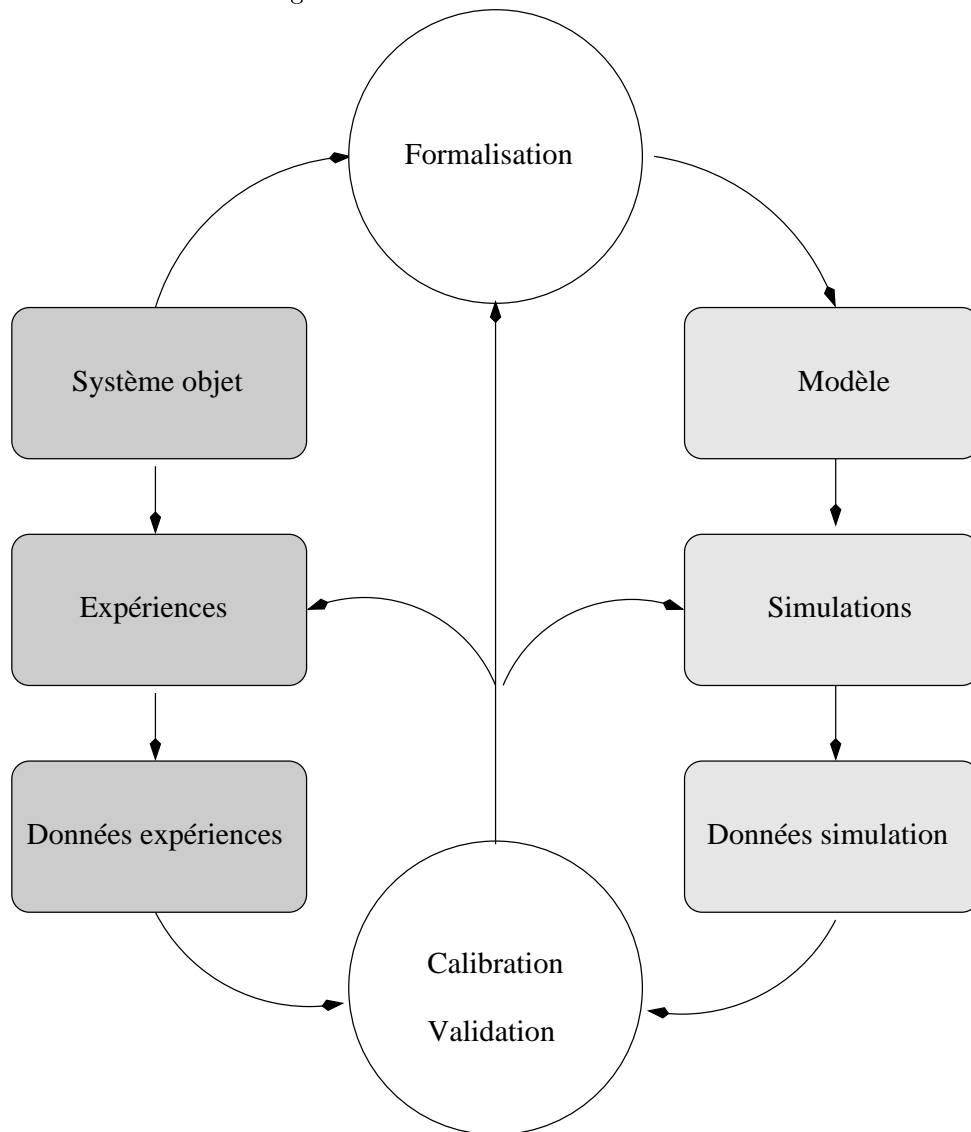
Remarque : Objectifs de la simulation et critères de validation.

Le caractère interdisciplinaire de certaines modélisations -notamment celles des réseaux neuronaux- a pour conséquence des divergences dans les modes d'évaluation des modèles. Les ingénieurs privilégient le caractère opérationnel du modèle, c'est-à-dire sa capacité à accomplir la tâche qui lui est dévolue. Les neurobiologistes, outre ce critère d'efficacité, doivent être attentifs à la plausibilité neurobiologique aussi bien en terme de structures qu'en terme de fonctionnement (mécanismes).

EN RÉSUMÉ :

la démarche "modélisation simulation" est étroitement liée à la démarche expérimentale selon le schéma de la figure suivante.

Schéma de la démarche générale



Chapitre 2

Modèles mathématiques en sciences cognitives

2.1 Les modèles de la psychophysique

En psychologie expérimentale, la psychophysique offre de bons exemples de formalisations mathématiques et notamment celles concernant la relation stimulus-sensation. Les fonctions psychométriques sont les fonctions mathématiques qui définissent la relation entre l'intensité de la sensation et l'intensité du stimulus. Elles sont établies à partir d'observations psychophysiques, où l'on mesure sur une échelle subjective l'intensité de la sensation pour différentes valeurs de l'intensité du stimulus. (Transparents cours Psy)

Les lois les plus connues sont celles de WEBER-FECHNER et de STEVENS.

2.1.1 Loi de WEBER-FECHNER

FECHNER est parti de la loi de BOUGUER et WEBER, loi établie sur des bases empiriques qui stipulent que les valeurs des accroissements juste perceptibles ΔI , de l'intensité I d'une stimulation, sont telles que :

$$\frac{\Delta I}{I} = k \text{ (constante) (loi de BOUGUER-WEBER)}$$

Pour FECHNER les sensations ΔS qui correspondent aux accroissements ΔI juste perceptibles (Just Noticeable Differences ou jnd) du stimulus sont constantes. FECHNER a établi sa loi sur la base de ce postulat, le raisonnement est le suivant :

$$\Delta S = c \text{ (1)}$$

$$\frac{\Delta I}{I} = k \text{ (2) (où } c \text{ et } k \text{ sont des constantes)}$$

À partir de (1) et (2) on peut écrire que :

$$\frac{\Delta S}{\Delta I} = \frac{c}{k} I \text{ ou encore : } \frac{\Delta S}{\Delta I} = C I \text{ en posant } C = \frac{c}{k}$$

soit sous forme d'une équation différentielle :

$$dS = C \frac{dI}{I} \text{ (3)}$$

enfin, l'intégration de (3) conduit à :

Équation de FECHNER : $S = C \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$

avec I_0 intensité liminaire, seuil de perception absolu.

La sensation selon cette loi est donc une fonction logarithmique de l'intensité de la stimulation.

Une illustration de la loi de FECHNER : la magnitude apparente des étoiles. PTOLÉMÉE (astronome grec, 137 ap JC) établit une classification d'environ 1200 étoiles observées à l'oeil nu, selon 6 catégories de grandeur apparente, les cinq intervalles entre catégories étant constants. Par la suite, la mesure à l'aide d'instruments physiques de l'éclat lumineux E des étoiles, (c'est à dire l'intensité I du stimulus) montre que l'éclat lumineux et la magnitude (m grandeur perçue par l'observateur humain) sont liés par la relation :

$$m = 2.5 \log E$$

2.1.2 Équation de STEVENS :

Si la relation établie par FECHNER en 1850 rend compte du classement des magnitudes stellaires, en revanche elle ne rend pas compte de toutes les observations et mesures de la psychophysique. Elle est en défaut en particulier pour les valeurs très fortes ou très faibles du stimulus. D'autres lois et d'autres approches ont été proposées et notamment STEVENS (1950) a proposé une fonction puissance. La valeur de n dépend de la modalité considérée.

$$S = k' I^n + k$$

(S intensité de la sensation, I intensité de stimulation, k , k' constantes, n exposant)

2.2 Neurobiologie : Fonction de codage des fuseaux neuromusculaires

2.2.1 Rappels

Les capteurs sensoriels transforment des signaux physiques parvenant à un organisme en signaux nerveux (potentiels locaux -récepteur- et générateur-, puis potentiels d'action). Chaque type de capteur code pour un type spécifique de stimulus, température, pression, lumière etc. Les fuseaux neuromusculaires, largement distribués dans les muscles squelettiques, renseignent sur la longueur et la vitesse d'élongation de leur site musculaire d'insertion. Les décharges des fuseaux en réponse à des modifications de l'état du muscle sont étudiées chez l'animal et chez l'homme. Les données expérimentales ainsi obtenues permettent de décrire le comportement de ces organes proprioceptifs et il est intéressant d'établir un modèle décrivant leur comportement.

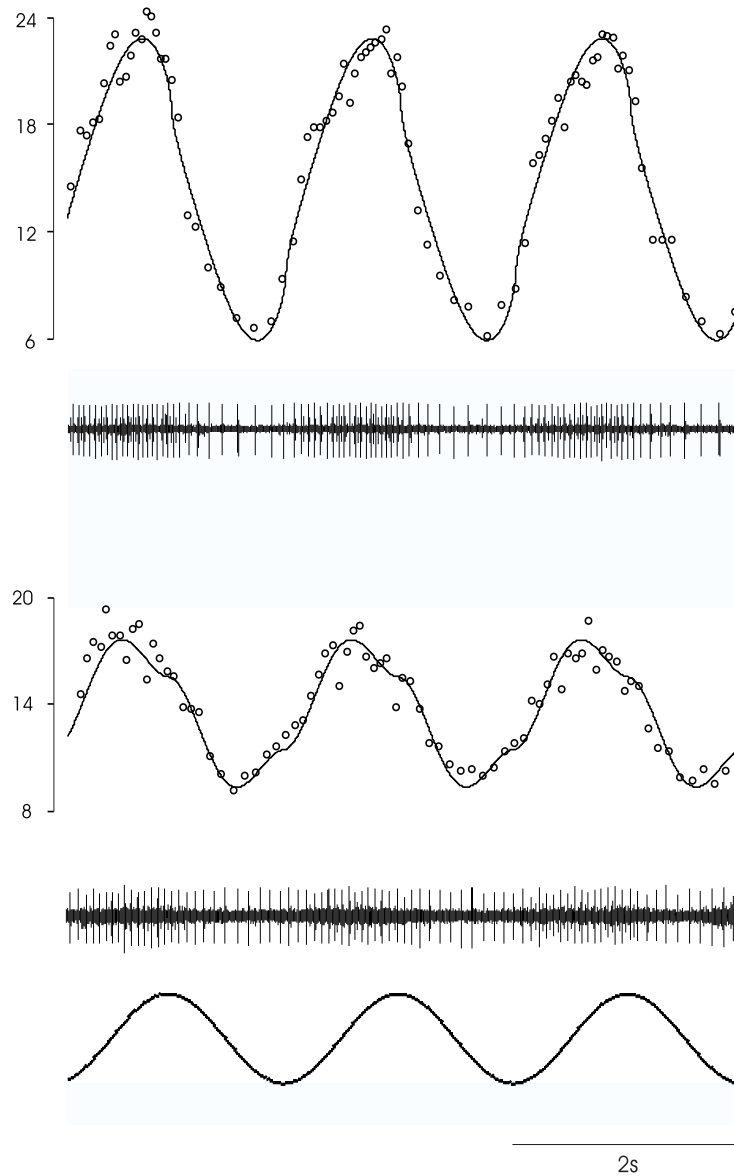
2.2.2 Fonction de codage des fuseaux chez l'homme

De tels modèles ont été produits à partir des observations faites chez l'animal et nous avons récemment modélisé ce comportement pour les fuseaux humains

2.2. NEUROBIOLOGIE : FONCTION DE CODAGE DES FUSEAUX NEUROMUSCULAIRES¹⁷

(GILHODES, non publié). Les données que nous avons utilisées pour vérifier le modèle sont enregistrées par microneurographie¹ chez l'homme dans notre laboratoire (E.RIBOT-CISCAR, J.P. ROLL). La figure ci dessous montre les décharges produites par des fuseaux neuromusculaires lorsque le muscle qui les contient est soumis à un étirement sinusoïdal (le profil d'étirement est représenté par la courbe du bas). Les tracés correspondent aux activités de deux fibres, respectivement de type primaire (Ia) et secondaire (II); ils montrent la décharge elle-même (train de P.A.) au dessus de laquelle est représenté le fréquencegramme - sous la forme d'une succession de points dont l'ordonnée indique la fréquence instantanée (échelle en impulsions/ par seconde)-

¹technique d'enregistrement des activités électriques de fibres (afférentes ou efférentes) à l'aide de microélectrodes implantées dans un nerf, dans ce cas il s'agit d'une branche du nerf sciatique (SPE).



Il s'agit d'établir la relation entre le profil d'élongation et la courbe de fréquence. Celle que nous avons testé suppose que la fréquence de décharge d'une fibre fusoriale est fonction à la fois de la longueur musculaire et de la vitesse d'élongation sous la forme suivante :

$$F_t = c_0 + c_1 \cdot l_t + c_2 \cdot (l'_t)^p$$

avec F : fréquence instatnée à t , l et l' : longueur musculaire et sa dérivée, p facteur puissance, c_0 , c_1 , c_2 coefficients.

La méthode consiste à rechercher pour différentes valeurs de p les valeurs des

2.3. NEUROBIOLOGIE CELLULAIRE : POTENTIEL DE REPOS NEURONAL 19

coefficients c_i connaissant F , l (l' est dérivée de l par calcul numérique). Nous avons utilisé un programme de régression multilinéaire (Lab View) et déterminé pour chaque décharge le facteur p et les coefficients c_i qui permettent la meilleure approximation. On peut calculer à l'aide des fonctions ainsi obtenues les courbes de fréquence théorique (les courbes théoriques sont représentées sous forme de tracé continu superposé aux données expérimentales). Pour la majorité des fibres étudiées ($n = 46$), le modèle rend compte de 90 % des variations de fréquence.

L'intérêt de cette modélisation mathématique du codage du mouvement par les fuseaux :

- intérêt descriptif, l'activité d'une fibre donnée dans un contexte donné peut être résumée par un jeu de quatre paramètres. Ces paramètres peuvent servir base pour caractériser les changements éventuels de la dynamique du fuseau (changements de sensibilité), pour comparer et catégoriser les différentes fibres....
- intérêt pour l'étude des processus de décodage (élaboration par le système nerveux central des sensations kinesthésiques), ainsi nous avons fait l'hypothèse que les structures du système nerveux central impliquées dans ce décodage réalisent un fonction inverse de la fonction de codage.

2.3 Neurobiologie cellulaire : Potentiel de repos neuronal

Les différents états électriques de la cellule nerveuse dépendent des modifications des concentrations ioniques de part et d'autre de la membrane cellulaire. Ces états et ces modifications sont le fait de propriétés membranaires et de processus passifs ou actifs. Les états électriques membranaires, caractérisés en terme de potentiel et de courants, ont été formalisés à l'aide de différentes fonctions mathématiques inspirées de l'électrochimie. On prendra pour exemple la formalisation du potentiel de repos qui permet de calculer la valeur de ce potentiel à partir de l'évaluation des concentrations des principaux ions et de la perméabilité membranaire.

L'équation de NERNST permet de calculer le potentiel des piles de concentrations constituées par les différents ions, par exemple la "pile" potassium :

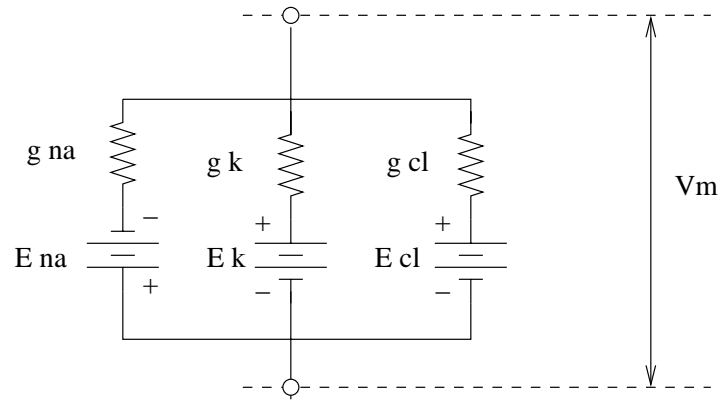
$$E_k = -58 \log \frac{K_i}{K_e} = -84 mv$$

L'évaluation du potentiel de repos V_m fait intervenir les valeurs E calculées pour les ions $k+$, $Na+$ et $Cl-$, ainsi que les perméabilités respectives gk , gna et gcl -la perméabilité étant l'inverse de la résistance qu'oppose la membrane au passage de ces ions- :

$$V_m = \frac{gk \cdot E_k + gna \cdot E_{na} + gcl \cdot E_{cl}}{gk + gna + gcl}$$

on trouve, à l'aide de cette équation une valeur proche du potentiel de repos mesuré, la différence s'explique par l'existence de processus de pompage.

Cette formalisation, de type mathématique peut se traduire en une représentation schématique sous la forme d'un circuit dit "*circuit équivalent*" :



Cette "transcription" permet le passage à une forme concrétisable en cablant le circuit à l'aide de composants électroniques.